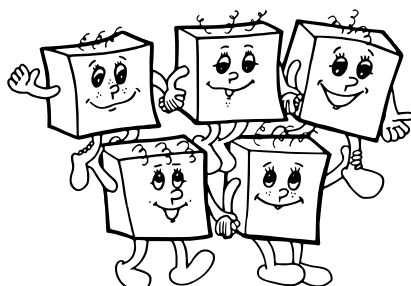


OLYMPIÁDA V INFORMATIKE

NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

<http://oi.sk/>



dvadsiaty siedmy ročník
školský rok 2011/2012

zadania celoštátneho kola, deň 1
kategória A

Priebeh celoštátneho kola

Celoštátne kolo 27. ročníka Olympiády v informatike, kategórie A, sa koná v dňoch 28.–31. 3. 2012. Na riešenie úloh prvého, teoretického dňa majú súťažiaci 4,5 hodiny čistého času. Rôzne úlohy riešia súťažiaci na samostatné listy papiera. Akékoľvek pomôcky okrem písacích potrieb (napr. knihy, výpisy programov, kalkulačky) sú zakázané.

Čo má obsahovať riešenie úlohy?

- Slovné popíšte algoritmus.
Slovný popis riešenia musí byť jasný a zrozumiteľný i bez nahliadnutia do samotného algoritmu/programu.
- Zdôvodnite správnosť vášho algoritmu.
- Uveďte a zdôvodnite jeho časovú a pamäťovú zložitosť.
- Podrobne uveďte dôležité časti algoritmu, ideálne vo forme programu v Pascale alebo C/C++.
- V prípade, že používate vo svojom programovacom jazyku knižnice, ktoré obsahujú implementované dátové štruktúry a algoritmy (napr. STL pre C++), v popise algoritmu stručne vysvetlite, ako by ste napísali program s rovnakou časovou zložitou bez použitia knižnice.

Hodnotenie riešení prvého (teoretického) dňa

Za každú úlohu môžete získať od 0 do 10 bodov.

Pokiaľ nie je v zadaní povedané ináč, najdôležitejšie dve kritériá hodnotenia sú v prvom rade **správnosť** a v druhom rade **efektívnosť** navrhnutého algoritmu. Na výslednom počte bodov sa môže prejaviť aj kvalita popisu riešenia a zdôvodnenie tvrdení o jeho správnosti a efektívnosti.

Efektívnosť algoritmu posudzujeme vypočítaním jeho časovej zložitosti – funkcie, ktorá hovorí, ako dlho vykonanie algoritmu trvá v závislosti od veľkosti vstupných parametrov. Nezávisí pri tom na konštantných faktoroch, len na rádovej rýchlosti rastu tejto funkcie.

V zadaní úlohy môžu byť uvedené limity na veľkosť premenných. Tieto môžete použiť na odhad toho, ako dobré vaše riešenie je. Na počítači, ktorý vykoná miliardu inštrukcií za sekundu, vyrieši vzorové riešenie ľubovoľný povolený vstup nanajvýš za niekoľko sekúnd.



A-III-1 Odpoveď

Na úvod tohto zadania si pripomeňme, že *medián* postupnosti nepárnej dĺžky je jej prostredný prvok podľa veľkosti. Inými slovami, je to ten jej prvok, ktorý by bol presne uprostred, ak by sme danú postupnosť usporiadali. Napríklad mediánom postupnosti (3, 1, 4, 1, 5) je číslo 3 a mediánom postupnosti (9, 2, 6, 5, 3, 5, 8) je číslo 5.

Po dlhé roky sa vo vesmíre hľadala odpoveď na základnú otázku života, vesmíru a vôbec. Nakoniec túto odpoveď počítač na to určený aj vypočítal. Samotná odpoveď však bola pomerne prekvapivá: bolo ňou číslo 42. A až vtedy mnohí pochopili, že radšej mali chcieť poznať samotnú otázku.¹

Ako z tejto kaše von? Jeden nápad mali členovia Klubu Starostlivých Pisárov (skrátene KSPáci): možno bolo v skutočnosti číslo 42 len časťou dlhšej odpovede, ktorú sa nepodarilo zachytiť. KSPáci našťastie po dlhé roky starostlivo zapisovali všetky dôležité čísla, na ktoré vo vesmíre narazili: od počtu zelených opíc až po veľkosť atómov v pravom zadnom kúte galaxie. V postupnosti, ktorú zapísali, sa číslo 42 nachádzalo práve raz. No a KSPáci by teraz chceli nájsť podrobnejšiu odpoveď na otázku života, vesmíru a vôbec. Nazdávajú sa, že ide o súvislú podpostupnosť zaznamenaných čísel, ktorej mediánom je práve naša stará známa hodnota 42. Existuje ale vôbec takáto podpostupnosť? A nie je ich náhodou viac?

Súťažná úloha

Dané je celé číslo n a následne postupnosť tvorená n celými číslami. Práve jedno z týchto čísel je rovné 42. (Ostatné čísla môžu byť veľké, ale zmestia sa do bežnej celočíselnej premennej. Môžete napr. predpokladať, že sú z rozsahu od -10^9 po 10^9 .)

Napište program, ktorý spočíta, koľko má táto postupnosť *súvislých* podpostupností, ktoré majú *nepárnu dĺžku* a zároveň *medián rovný 42*.

Príklad

vstup	výstup
10 -5 13 42 88 37 41 43 100 50 72	6

Je to týchto 6 podpostupností:

(42),
(42, 88, 37),
(42, 88, 37, 41, 43),
(13, 42, 88),
(13, 42, 88, 37, 41, 43, 100) a
(-5, 13, 42, 88, 37, 41, 43, 100, 50).

Hodnotenie

Úmyselne neuvádzame obmedzenie na veľkosť premennej n . Váš program dostane tým viac bodov, čím lepšia bude jeho časová zložitosť v závislosti od n .

¹Ak vám tieto slová nič nehovoria, odporúčame vám knihu od Douglasa Adamsa s názvom Stopárov sprievodca po galaxii (v origináli The Hitchhiker's Guide to the Galaxy). S riešením tejto úlohy vám znalosť tejto knihy samozrejme nijako nepomôže.



A-III-2 U obchodníka s rozličným kradnutým tovarom

Vďaka vašim riešeniam z krajského kola sa šialenému robotovi Robertovi podarilo nepozorovane ukradnúť za plné vrece modelov vesmírnych lodí. Po tomto trúfalom kúsku sa Roberto náhlil na čierny trh, kde sa chystá toto vrece predať. Chce zaň dostať presne s peňazí. (Číslo s je kladné a celé.)

Na trhu sa platí pomocou n druhov mincí. (Každý druh mincí má kladnú celočíselnú hodnotu. Všetky tieto hodnoty sú pomerne malé.)

Samozrejme, platenie funguje ako v bežnom obchode: Platiaci nemusia zaplatiť presnú sumu. Môže zaplatiť aj viac a následne si nechať vydať sumu, o ktorú zaplatil viac ako mal. Aj Roberto, aj obchodník na trhu majú z každého druhu mince dostatočne veľa kusov.

Roberto sa i tentoraz ponáhľa, preto chce, aby celá transakcia prebehla čo najrýchlejšie. Požaduje, aby platba sumy s prebehla takým spôsobom, pri ktorom bude celkový počet kusov mincí použitých pri platení a vydávaní najmenší možný. Keďže to vôbec nie je ľahká úloha, Roberto sa obrátil na vás. Poradte mu, lebo inak vás bonzne polícia, že ste mu minule pomáhali pri krádeži.

Súťažná úloha

V prvom riadku vstupu je zadaná celočíselná suma s , ktorú chce Roberto dostať, a počet druhov mincí n . Druhý riadok obsahuje kladné celé čísla $c_1, c_2, \dots, c_n$: hodnoty jednotlivých druhov mincí. Tieto hodnoty sú usporiadané vzostupne. Navyše platí $c_1 = 1$, aby sa každá suma určite dala zaplatiť.

Vypíšte dva riadky obsahujúce po n čísel. V prvom riadku vypíšte pre každý druh mince počet takých mincí, ktoré má použiť obchodník, v druhom riadku počty mincí, ktoré má Roberto obchodníkovi vydať. Poradie vypísaných hodnôt má zodpovedať poradiu zo vstupu.

Ak existuje viacero riešení s optimálnym celkovým počtom použitých mincí, nájdite ľubovoľné z nich.

Príklady

vstup	výstup
8 4 1 2 5 10	0 0 0 1 0 1 0 0

Suma 8 sa jednou mincou zjavne zaplatiť nedá, no dvomi to už ide: obchodník zaplatí 10 a Roberto mu vydá 2.

vstup	výstup
10 3 1 5 6	0 2 0 0 0 0

Hodnotenie

Sústredte sa na to, aby vaše riešenie bolo v prvom rade korektné – teda vždy našlo optimálny spôsob platenia. Riešenia, ktoré nebudú korektné, budú posudzované veľmi prísne!

U väčšiny typov riešení je veľmi dôležitou súčasťou riešenia **dôkaz jeho správnosti**. Riešenia, v ktorých dôkaz nebude uvedený, môžu (podľa toho, nakoľko je/nie je zjavný) stratiť značnú časť bodov.

- 10 bodov sa dá získať za riešenie, ktoré zvládne efektívne vyriešiť vstupy s $n \leq 100$, $c_n \leq 1000$ a $s \leq 10^{18}$.
- Až 8 bodov sa dá získať za riešenie, ktoré zvládne efektívne vyriešiť vstupy s $n \leq 100$, $c_n \leq 1000$ a $s \leq 10^6$.
- Až 5 bodov sa dá získať za riešenie, ktoré zvládne efektívne vyriešiť vstupy s $n \leq 50$, $c_n \leq 1000$ a $s \leq 1000$.
- Každé korektné riešenie môže získať aspoň 3 body, bez ohľadu na časovú zložitosť.



A-III-3 Zlomkové programy sa lúčia

V poslednej úlohe tohto dňa sa naposledy stretnete so zlomkovými programmi.

Študijný text k tejto úlohe je uvedený na nasledujúcej strane.

Je identický so študijným textom z domáceho a krajského kola.

Súťažná úloha

Súťažná úloha sa skladá z troch podúloh, označených „a“, „b1“ a „b2“. U podúloh b1 a b2 sa očakáva, že si vyberiete a vyriešite jednu z nich.

Ak sa pokúsite vyriešiť aj podúlohu b1, aj podúlohu b2, započíta sa vám tá z nich, za ktorú dostanete viac bodov. Za ľubovoľné korektné riešenie podúlohy b2 budú udelené aspoň 4 body. Ak teda viete vyriešiť podúlohu b2, nie je potrebné uvádzať riešenie podúlohy b1.

- a) (3 body) Na vstupe je číslo n tvaru $2^x 3^y 5^z$, pričom $x, y, z \geq 0$.
Napíšte program, ktorý ho prerobí na číslo $7^{\text{median}(x,y,z)}$.

Mediánom troch čísel je prostredné podľa veľkosti. Teda napríklad:

$\text{median}(2, 5, 8) = 5$, $\text{median}(8, 2, 5) = 5$, $\text{median}(3, 3, 7) = 3$, $\text{median}(3, 2, 3) = 3$.

Váš program má teda napr. z čísla $n = 2^8 3^2 5^5$ vyrobiť číslo 7^5 .

- b1) (3 body) Na vstupe je číslo n tvaru $2^x \cdot 47$, pričom $x \geq 0$.
Napíšte program, ktorý ho prerobí na číslo $3^{(x^2)}$.

Teda napríklad:

- z čísla $n = 47 = 2^0 \cdot 47$ by mal vyrobiť číslo $3^0 = 1$,
- z čísla $n = 2^4 \cdot 47$ by mal vyrobiť číslo 3^{16} .

- b2) (7 bodov) Na vstupe je číslo n tvaru 2^x , pričom $x \geq 0$.
Napíšte program, ktorý ho prerobí na číslo 3^y , kde $y = \lceil \sqrt{x} \rceil$.

Značenie $\lceil z \rceil$ označuje hornú celú časť čísla z : najmenšie celé číslo, ktoré je aspoň z .

Napr. $\lceil 4.7 \rceil = 5$, $\lceil 47 \rceil = 47$, $\lceil \sqrt{16} \rceil = \lceil 4 \rceil = 4$ a $\lceil \sqrt{22} \rceil = 5$.

Váš program má teda napríklad:

- z čísla $n = 2^{16}$ vyrobiť číslo 3^4 ,
- z čísla $n = 2^{22}$ vyrobiť číslo 3^5 .

Hodnotenie

Pri hodnotení úlohy sa bude prihliadať aj na časovú zložitosť vašich zlomkových programov – teda na počet krokov výpočtu v závislosti od parametrov x , y a z . Ak bude váš program potrebovať rádovo viac krokov ako vzorový, môžete získať najviac 2 body v podúlohe a, najviac 2 body v podúlohe b1, resp. 4-6 bodov v podúlohe b2.



Študijný text

Zlomkové programy predstavujú jeden veľmi jednoduchý spôsob, ako počítať niektoré funkcie na prirodzených číslach. Samotný zlomkový program je veľmi jednoduchý: je to konečná postupnosť zlomkov, teda kladných racionálnych čísel $(z_1, \dots, z_k)$.

Výpočet zlomkového programu prebieha v krokoch. Počas výpočtu si udržiavame jediné celé číslo, tzv. *aktuálnu hodnotu* a . Na začiatku výpočtu na vstupe n je $a = n$. Každý krok výpočtu vyzerá nasledovne: Nájdeme najmenšie i také, že $a \cdot z_i$ je celé číslo, a zmeníme aktuálnu hodnotu na $a \cdot z_i$. Ak také i neexistuje, výpočet končí.

Príklad 1. Ukážeme si program, ktorý pre vstup $n = 2^x$ (kde $x \geq 0$) vyrobí výstup 3^y , kde $y = x \bmod 3$.

Jedným takýmto programom je postupnosť $(1/8, 9/4, 3/2)$. Slovné si priebeh výpočtu tohto programu môžeme popísať nasledovne: kým sa to dá, znižuj x o 3. Keď sa to už nedá, máme v a číslo 1, 2, alebo 4, vyrobíme z neho teda 1, 3, alebo 9.

Príklad výpočtu pre $n = 1024 = 2^{10}$: Hodnota a sa bude meniť nasledovne: $2^{10} \xrightarrow{1} 2^7 \xrightarrow{1} 2^4 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{3} 3$. (Číslo nad šípku je poradovým číslom zlomku, ktorým sme a v danom kroku pre násobili.)

Všimnite si, že záleží na poradí zlomkov. Napríklad program $(9/4, 3/2, 1/8)$ by z čísla 2^x vyrobil číslo 3^x . Zlomok $1/8$ by sa pri výpočtoch tohto programu nikdy nepoužil.

Iné vyhovujúce programy sú $(1/8, 3/2)$, $(3/2, 1/27)$ a $(1/27, 3/2)$. Rozmyslite si, prečo každý z nich tiež rieši zadanú úlohu.

Príklad 2. Čo urobí program $(2/2)$ na vstupe $n = 4$? A čo na vstupe $n = 7$?

Oblíbenou chybou je odpovedať, že na vstupe $n = 4$ sa tento program zacyklí, ale na vstupe $n = 7$ sa program zastaví, lebo 7 nie je deliteľné dvomi. Správna odpoveď ale je, že v **oboch** prípadoch bude program bežať do nekonečna. Zaujímajú nás totiž len hodnoty zlomkov, nie ich zápis. Zlomok $2/2$ predstavuje racionálne číslo 1, a $7 \cdot (2/2) = 7 \cdot 1$ je celé číslo.

Aby ste sa vo svojich riešeniach takto nepoplietli, odporúčame uvádzať všetky zlomky v základnom tvare. Pre takto zapísanú postupnosť zlomkov potom už platí, že v každom kroku hľadáme najmenšie i , pre ktoré menovateľ i -teho zlomku delí aktuálnu hodnotu.

Príklad 3. Ukážeme si program, ktorý pre vstup $n = 2^{x+1}$ (kde $x \geq 0$) vyrobí výstup 3^{x+2} .

Číslo na vstupe je určite párne a nie je deliteľné žiadnym prvočíslom iným ako 2. Použijeme prvočíslo 11 ako značku, že už nie sme na začiatku výpočtu. V prvom kroku teda prepíšeme číslo 2^{x+1} na $2^x 3^2 11$. Toto dosiahneme zlomkom $3^2 \cdot 11/2 = 99/2$.

Ak už vidíme v prvočíselnom rozklade aktuálnej hodnoty prvočíslo 11, znamená to, že prvý krok máme úspešne za sebou. Môžeme teda spokojne „meniť dvojky na trojky“. To vieme dosiahnuť napríklad postupnosťou zlomkov $(3 \cdot 13)/(2 \cdot 11)$ a $11/13$. (Všimnite si, že nestačí použiť jeden zlomok $33/22$. Ak vám nie je jasné, prečo, prečítajte si ešte raz príklad 2.)

Časom sa takto dostaneme k číslu $3^{x+2} 11$. V tejto situácii už stačí len vydeliť aktuálnu hodnotu číslom 11 a môžeme skončiť.

Pozor treba dať na to, že vyššie popísané zlomky treba dať do správneho poradia: $(39/22, 11/13, 1/11, 99/2)$. V prvom kroku výpočtu sa zjavne použije posledný zlomok. Od tejto chvíle je aktuálna hodnota deliteľná číslom 11 alebo 13. Striedavo sa používajú prvé dva zlomky, až kým sa nedostaneme do situácie $a = 3^{x+2} 11$. Vtedy sa už prvý ani druhý zlomok použiť nedá. Použije sa preto tretí, čím dosiahneme $a = 3^{x+2}$ a výpočet zjavne končí.

Poznámka. V riešeniach podobných tomu v príklade 3 nie je nutné čitatele a menovatele zlomkov roznásobovať. Pokojne uveďte svoje riešenie v tvare $((3 \cdot 13)/(2 \cdot 11), 11/13, 1/11, (3^2 \cdot 11)/2)$.

DVADSIATY SIEDMY ROČNÍK OLYMPIÁDY V INFORMATIKE

Autori úloh: Michal Anderle, Vladimír Boža, Michal Forišek, Peter Fulla, Ján Hozza

Recenzent: Michal Forišek

Slovenská komisia Olympiády v informatike

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012